Mathe 3 / 3. UE 10. 4. 2013

21) $V(x,y,z) = \begin{cases} f(\|x\|) \overset{\to \text{Richtung}}{\dfrac{x}{\|x\|}} & \vec{x} \neq \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{x} \neq \vec{0} \end{cases}$

Gradientenfeld? → Wirbelfrei? → rot

$V(x) \Rightarrow$ Grad.-feld, wenn $\operatorname{rot}\vec{V} = 0$

rot: $\nabla \times \vec{V} = \overbrace{\nabla f(\|x\|) \times \frac{x}{\|x\|}}^{①} + \overbrace{\cancel{f(\|x\|) \times \nabla \times \frac{x}{\|x\|}}}^{②}$

↑ Produktregel

$x'v + xv' \Rightarrow {}' = \nabla$

<u>Nebenrechnung:</u> $\varphi(x) = \|x\|$

$\varphi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x \\ --- \\ --- \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|} \cdot x$$

$\Rightarrow \nabla(\|x\|) = \frac{x}{\|x\|}$

$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

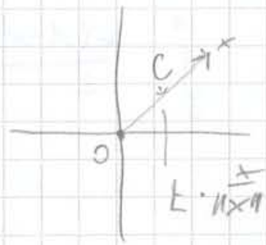
$\underbrace{f'(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}}_{①}$

$\underbrace{\nabla \times (\|x\|^{-1} \cdot x) = -\|x\|^{-2} \frac{x}{\|x\|} \times x + \|x\|^{-1} \times 0 = 0}_{②}$

$f'(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|} \times \frac{x}{\|x\|} = \underline{\underline{0}}$

d.h. es gibt ein Potential φ $\nabla\varphi = V$

$\varphi(\vec{x}) = \int_C V(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt$



C... irgendeine Verbindung von 0 bis x

$t \in [0, \|x\|]$

$$= \int_0^{\|x\|} \underbrace{f\left(\left\|t \frac{x}{\|x\|}\right\|\right) \cdot \frac{t x}{\|t x\|}}_{\text{Vektorfeld}} \cdot \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{Tangentialvektor}} \, dt = \int_0^{\|x\|} f(t)\,dt$$

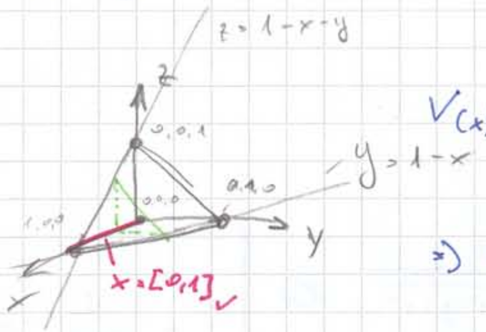
$$= 1$$

$$= F(\|x\|) - F(0)$$

$V(x,y) = \frac{\vec{x}}{\|x\|^2}$ $\qquad f(t) = \frac{1}{t} \qquad f(\|x\|) = \frac{1}{\|x\|} \qquad$ Pot. $= \varphi = \log(\|x\|)$

$\Delta_2 \log\|x\| = 0$

33)



$$V(x) = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \\ xyz \end{pmatrix}$$

⇒ Oberflächenintegral ?

$$\iint_{\partial T} \vec{V} \, d\vec{O}$$

Paradebsp.: für $\boxed{\text{Gauß}}$, wenn geschlossenes Oberfläche

$$\iint_{\partial T} \vec{V} \, d\vec{O} = \iiint_T \nabla \cdot \vec{V} \, dx\,dy\,dz$$

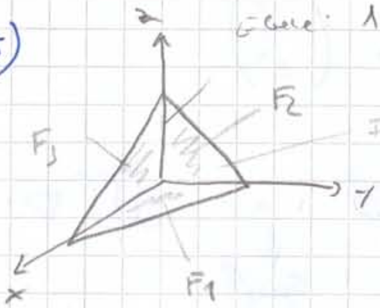
$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 + 0 + xy$$

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} xy \, dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \underbrace{x \cdot y \cdot (1-x-y)}_{xy - x^2y - xy^2} \, dy\,dx$$

ausmultiplizieren → $\int^1$ → fertig

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}(1-x)^2 - \frac{x}{3}(1-x)^3 \, dx = \frac{1}{120}$$

25) Ebene: $1 = x - y - z$



$$\iint_{F_1} + \iint_{F_2} + \iint_{F_3} + \iint_{F_4} = \iint_{OF} = \frac{1}{120}$$

Gauß nicht mehr möglich, da im Raum nicht mehr geschlossen

$$V_{|F_1} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \\ xy\cdot 0 \end{pmatrix} \text{ (siehe } V(x) \text{ aus Angabe)}$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_{|F_1} \perp \vec{n} = 0$$

$$V_{|F_2} = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{|F_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{|F_4} = \begin{pmatrix} 2\cancel{y} \\ 2\cancel{x} \\ xy(1-x-y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

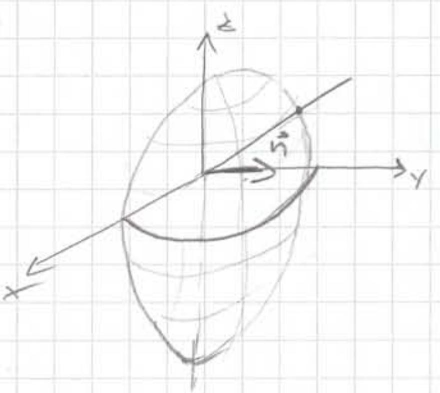
$$\iint_{F_2} \vec{V}\, d\vec{O} = \iint_{y=0\ z}^{1} = \int_0^1 \int_0^{1-y} -2y \; dz\, dy = -2\int_0^1 y - y^2 \, dy = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

$V_{F_2} \cdot n_2$

$$\iint_{F_3} \vec{V}\, d\vec{O} = \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{1-x} -2x \; dz\, dx = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

$$0 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + F_4 = \frac{1}{120}$$

24)



$$V(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$$

$$\iint_{\partial H} \vec{v}\, d\vec{O} \underset{\text{Gauß}}{=} \iiint \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 1+1+2z = 2(1+z)$$

Kugelkoord.: $x = r\cos\varphi \sin\vartheta$, $y = r \sin\varphi \sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$ $J = R^2 \sin\vartheta$

$$\int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2 + 2r\cos\vartheta) \cdot r^2 \sin\vartheta \, d\varphi\, d\vartheta\, dr$$

$$= \pi \int_0^1 \left(-2r^2\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}r^3 \cos 2\vartheta\right)\Big|_0^{\pi} = \pi \int_0^1 4r^2\, dr = 4\pi \frac{r^3}{3}$$

$$\underline{\underline{= \frac{4}{3}\pi}}$$

26) Deckfläche: Parametrische Fläche

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 0 \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \quad r \in [0,1],\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{V}_D = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 0 \\ r^2 \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = x_r \times x_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iint_{r=0,\ \varphi=0}^{1,\ 2\pi} r \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

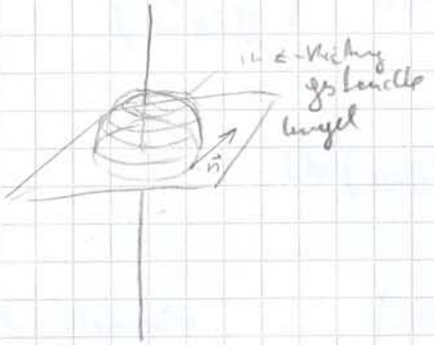
$\Rightarrow$ gesamter Fluss durch Halbkugel

$\Rightarrow$

Randkurve !

28) $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y + 1 \\ 2xy \\ z^2 + yz \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{E}: \; 4z^2 = 9 - (x^2 + y^2)$

$z = 0: \; 0 = 9 - (x^2 + y^2)$ bzw. $x^2 + y^2 = 9$



$$\iint_{\mathcal{E}^+} \operatorname{rot} \vec{V} \, d\vec{O} \overset{?}{=}$$

Oberfläche einer Rotation $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

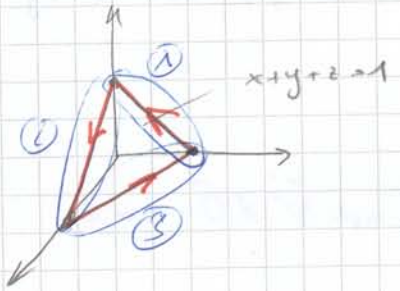
$$\iint_{\mathcal{E}^+} \operatorname{rot} \vec{V} \, d\vec{O} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint \vec{V}\big(x(t)\big) \, \dot{x}(t) \, dt$$

$C: \begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \displaystyle\int_0^{2\pi} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 9\cos^2\varphi - 3\sin\varphi + 1 \\ 9\sin 2\varphi \\ \phi \end{pmatrix}}^{\text{Vektorfeld entlang des Kreis}}}_{\text{Additionstheorem}} \underbrace{\begin{pmatrix} -3\sin\varphi \\ 3\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{C'} \, d\varphi$

(1. Term: jede sin-cos einer ganzen Periode $= \phi \Rightarrow$)

$$\int_0^{2\pi} 9\sin^2 d\varphi = \underline{\underline{9\pi}}$$

27) ~~[illegible]~~



$$V_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} z(x-y) \\ x+2y \\ y(2z-x) \end{pmatrix}$$

$$\oint_C v(x(s))\, ds$$

$$\text{rot } V_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2z-x \\ x \\ z+1 \end{pmatrix}$$

Versuch: $s\vec{a} + t\vec{G}$ $\quad s \in [0,1]$, $t \in [0,1]$

1.) $C_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in [0,1] \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$

$$\int_0^1 \underbrace{\begin{pmatrix} t(t-1) \\ 2-t \\ 2t(1-t) \end{pmatrix}}_{V_{(x,y,z)} \text{ mit } C_1 \text{ eingesetzt}} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{C_1'} dt = \int_0^1 (-2+t+2t-2t^2)\, dt$$

$$= -2 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{-\frac{7}{6}}}$$

2)

3) $\underline{\underline{\text{wie } 1}}$

wurde dann mit Stokes gelö[st]