

Aufgabe: Kugelgasbehälter

a) Ansatz mit einer ganz-rationalen Funktion 3. Grades:

$$v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \text{ mit } v'(t) = 3at^2 + 2bt + c.$$

Aus den Informationen im Text ergeben sich die folgenden Bedingungen:

Die Zulaufgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$

– beträgt $22 \text{ m}^3/\text{h}$: $v(1) = 22$

– ist maximal: $v'(1) = 0$ (*notwendige Bedingung*)

Die Zulaufgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 4$

– beträgt $-32 \text{ m}^3/\text{h}$: $v(4) = -32$

– ist minimal: $v'(4) = 0$ (*notwendige Bedingung*)

Setzt man diese in die Gleichungen für $v(t)$ bzw. $v'(t)$ ein, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit zugehöriger erweiterter Koeffizientenmatrix:

$$\begin{array}{cccc|c} a & + & b & + & c & + & d & = & 22 \\ 3a & + & 2b & + & c & + & & = & 0 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & -32 \\ 48a & + & 8b & + & c & + & & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & -32 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Bei der Lösung des Gleichungssystems mithilfe linearer Zeilenumformungen erhält man folgende Zwischenschritte

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -66 \\ 0 & -48 & -60 & -63 & -1440 \\ 0 & -40 & -47 & -48 & -1056 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -66 \\ 0 & 0 & 36 & 81 & 1728 \\ 0 & 0 & 33 & 72 & 1584 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -66 \\ 0 & 0 & 1 & 2,25 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & -2,25 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -66 \\ 0 & 0 & 1 & 2,25 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Aus der Matrix in Dreiecksform kann man von unten nach oben die Lösungen ablesen:

$d = 0,$

$c + 2,25 \cdot 0 = 48,$ also $c = 48,$

$b + 2 \cdot 48 + 3 \cdot 0 = 66,$ also $b = -30,$

$a + 1 \cdot (-30) + 1 \cdot 48 + 1 \cdot 0 = 22,$ also $a = 4.$

Damit lautet die Funktionsgleichung der Zulaufgeschwindigkeit:

$$v(t) = 4t^3 - 30t^2 + 48t$$

Kontrolle, ob diese so ermittelte Funktion tatsächlich die Bedingungen erfüllt:

Es gilt: $v'(t) = 12t^2 - 60t + 48 = 12 \cdot (t^2 - 5t + 4) = 12 \cdot (t - 1) \cdot (t - 4),$ also

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 4.$

Überprüfung, ob die hinreichenden Bedingungen erfüllt sind:

Da $v''(t) = 24t - 60$ liegt mit $v''(1) = -36 < 0$ für $t = 1$ ein lokales Maximum und mit $v''(4) = 36 > 0$ für $t = 4$ ein lokales Minimum vor.

- b) Zunächst läuft Flüssiggas in den zu Beginn bereits mit 42 m^3 gefüllten Tank ein. Die Zuflussgeschwindigkeit nimmt in der ersten Stunde immer weiter zu. Danach verringert sich die Zuflussgeschwindigkeit wieder (es wird aber weiter Flüssiggas eingefüllt), bis sie nach etwa 2,3 h gleich null ist. In diesem Moment fließt nichts ein oder aus. Anschließend wird die Zuflussgeschwindigkeit sogar negativ, was bedeutet, dass Flüssiggas aus dem Tank entnommen wird.

Man erkennt eindeutig, dass über dem Intervall $[0; 5]$ der Flächeninhalt der Fläche unterhalb der ersten Achse größer ist als der Flächeninhalt der Fläche oberhalb der ersten Achse. Daher wird dem Tank insgesamt mehr entnommen als zugeführt wird und er wird nach 5 h weniger als 42 m^3 Flüssiggas enthalten.

Es ergeben sich die Nullstellen: $t_1 = 0$; $t_2 = \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} \approx 2,31$; $t_3 = \frac{15}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} \approx 5,19$

Im Zeitintervall $[0; t_2]$ fließt Gas zu; im Zeitintervall $[t_2; 5]$ fließt Gas aus.

Die Nullstelle t_3 liegt außerhalb des betrachteten 5-stündigen Zeitintervalls.

- c) $v'(t) = 12t^2 - 60t + 48$; $v''(t) = 24t - 60$; $v'''(t) = 24$

Gesucht ist eine Extremstelle der ersten Ableitung, also eine Wendestelle, an der zusätzlich eine negative Steigung vorliegen soll.

Die notwendige Bedingung ergibt $v''(t) = 0 \Leftrightarrow 24t = 60 \Leftrightarrow t = 2,5$.

Aus der hinreichenden Bedingung $v''(2,5) = 0 \wedge v'''(2,5) = 24 \neq 0$ folgt, dass $t = 2,5$ eine Wendestelle ist.

Da außerdem auch $v'(2,5) = -27 < 0$, war die Abnahme nach 2,5 Stunden am größten.

Da weiterhin $v(2,5) = -5$, fließen zu diesem Zeitpunkt $5 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ aus dem Behälter heraus.

- d) (1) Bei der Berechnung der Füllmenge nach 2 Stunden mithilfe der Integralrechnung ist zu beachten, dass der Behälter bereits mit 42 m^3 gefüllt war.

$$\int_0^2 v(t) dt + 42 = \left[t^4 - 10t^3 + 24t^2 \right]_0^2 + 42 = 32 + 42 = 74$$

Nach 2 Stunden befinden sich also 74 m^3 Gas im Behälter.

- (2) Soll sich im Behälter wieder die Ausgangsmenge von 42 m^3 befinden, so muss die Bilanzsumme aus Zu- und Abfluss gerade wieder null ergeben.

Der Ansatz $\int_0^d v(t) dt = 0$ mit $d > 0$ führt zu der Gleichung:

$$d^4 - 10d^3 + 24d^2 = 0 \Leftrightarrow d^2(d^2 - 10d + 24) = 0 \Leftrightarrow d^2(d - 4)(d - 6) = 0$$

Diese hat die Lösungen $d = 0 \vee d = 4 \vee d = 6$.

Im betrachteten Zeitintervall befindet sich also nach 4 Stunden sowie zusätzlich nach 6 Stunden wieder die Ausgangsmenge im Behälter.

- e) (LK) Der kugelförmige Behälter hat den Radius $r = 3 \text{ m}$. Er kann als Rotationskörper betrachtet werden.

$$(1) V_{\text{ges}} = 2\pi \int_0^3 (9 - x^2) dx = 2\pi \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = 36\pi \approx 113,1$$

Das gesamte Volumen des Behälters beträgt etwa $113,1 \text{ m}^3$.